Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 19 februarie 2017

Clasa a X-a

Problema 1. Fie $f: R \to R$ o funcție cu proprietatea $f\left(f(x)\right) = x^2 - x + 1, (\forall)x \in R$.

Să se arate că : a) $f(1) = 1$;
b) funcția $h: R \to R, h(x) = x^3 - xf(x) + 1$ nu este injectivă.

Problema 2. Rezolvați ecuația:

$$\sqrt[3]{7 + 2x - x^2} - 1 = \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{12x^2 - 8}}$$

Problema 3. Fie *a*, *b*, *c* numere reale pozitive cu $abc = a + b + c + 2$. Să se arate că

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{a}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$$

Gazeta matematică

Problema 4. Fie $a \in R$. Dacă $z \in C \setminus R$ verifică egalitatea $z^n + nz + a = 0$, unde $n \in N^*$, arătați că $|z| \geq 1$.

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 19 februarie 2017

Clasa a IX-a

Problema 1. Fie A = $a\sqrt{2}+a\cdot b-b\sqrt{2}-2$.

a) Arătaţi că dacă A = 0 şi $b \in \mathbf{Q}$, atunci $a \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

b) Arătaţi că dacă A = 2 şi a , $b \in \mathbf{Q}$, atunci $|a|=|b|=A$.

Problema 2. Numerele $x, y, z \in (0,\infty)$ verifică $xyz = xy + yz + zx$. Să se demonstreze că

$$\frac{xy}{z(1+xy)}+\frac{yz}{x(1+yz)}+\frac{zx}{y(1+zx)} \geq \frac{9}{10}$$

Gazeta matematică

Problema 3. Fie M, N, P mijloacele laturilor $[AB], [AC]$ şi, respectiv $[BC]$ ale triunghiului ABC, iar D este ortocentrul triunghiului MNP.

a) Să se arate că $\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DP}$.

b) Dacă E este centrul de greutate al triunghiului MNP şi F este ortocentrul triunghiului ABC, atunci să se demonstreze că punctele D, E, F sunt coliniare.

Problema 4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1}}{(n+2)(n+3)}$.

a) Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

b) Să se demonstreze că suma primilor 2017 termeni ai şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ este mai mare decât 2016.

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 19 februarie 2017

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle/ a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Demonstraţi că $(M, +, \cdot)$ este inel comutativ cu divizori ai lui zero;
b) Determinaţi unităţile inelului;
c) Daţi exemplu de element nenul din M care nu este nici inversabil, nici divizor al lui zero.

Problema 2. a) Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e şi fie $a \in G$ şi $b \in G$ astfel încât $a \cdot b = b \cdot a^3$ şi $b \cdot a = a \cdot b^3$. Dacă G are ordin impar, demonstraţi că $a = b = e$.

b) Demonstraţi că numărul elementelor de ordin impar din orice grup finit este impar.

Gazeta matematică

Problema 3. a) Calculaţi $\int \sin \ln x \, dx$, $x \in (0, \infty)$.

b) Calculaţi $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\sin 2x+\cos 2x} dx$.

Problema 4. Demonstraţi că nu există $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să admită o primitivă $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

$$F(f(x)) = x, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală – Vaslui, 19 februarie 2017

Clasa a XI-a

Problema 1. a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{\ln\dfrac{ne}{n+1}}-1\right)$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[x]+[2^3x]+[3^3x]+...+[n^3x]}{C_{n+5}^4}$, $n\in\mathbb{N}^*, x\in\mathbb{R}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Problema 2. Fie $n\geq 2$ un număr natural şi $A\in M_n(\mathbb{R})$, astfel încât $A^6=A^3$. Să se arate că, dacă $A^3+B=I_n$, atunci :

a) $AB=BA$;

b) matricea $I_n+AB+A^2B^2$ este inversabilă.

Problema 3. Fie $n\geq 2$ un număr natural. Să se determine toate matricele $A\in M_n(\mathbb{C})$ cu $A^{2017}=-I_n$, pentru care există $X,Y\in M_n(\mathbb{C})$ care comută şi verifică $X+Y=I_n$, $AX=X^2$ şi $AY=-Y^2$.

Gazeta matematică

Problema 4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin, $a_0=1, a_1=2$ şi $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+2a_{n-1}}$, $\forall n\geq 1$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}, n\in\mathbb{N}^*$.

Notă. Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu 7 puncte.